

Estudio de concentradores de tensiones en árboles de máquinas, sometidos tensiones torsionales y combinadas

Sandra I. Robles¹, Daniela Alessio¹, Néstor F. Ortega¹ y Alberto P. Romeo²

Resumen

Los árboles de máquina de sección circular en servicio, para transmitir la potencia a otros órganos, llevan calados distintos elementos de transmisión, que a los efectos de fijar su posición, requieren que en el diseño y proyecto se dispongan inevitables discontinuidades geométricas. Las mismas conllevan variaciones en las secciones transversales resultando árboles no lisos, debido a resaltos, radios de acuerdo, muescas, orificios, y otras entallas, las cuales causan concentración e incremento de las tensiones variables que los solicitan, favoreciendo la ocurrencia de fallas por fatiga. Al modificar el diseño y proyecto de este elemento de transmisión, se procura encontrar formas racionales y disposiciones favorables para actuar sobre las causas que generan estas tensiones resultantes y minimizar el coeficiente geométrico del concentrador de tensiones. En este trabajo, se presentan los resultados obtenidos a través del análisis de tensiones, realizado por el Método de los Elementos Finitos, de modelos de árboles circulares no lisos con diferencia de diámetros en secciones contiguas y una entalla circular en zona previa al resalto, siendo los parámetros relevantes de estudio, el radio de acuerdo en la zona de vínculo de secciones de diámetros diferentes, la profundidad de la entalla circular y la ubicación de la misma.

Palabras Claves: Concentrador de tensiones, árbol de máquina, atenuación de efectos de fatiga.

1. Introducción

1. Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur. ingsandrarobles@gmail.com
2. Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional . apromeoing@gmail.com

Causan concentración de tensiones los cambios bruscos de sección, los radios de acuerdo, marcas de mecanizado que implican imperfecciones superficiales, ajustes con apriete entre partes, o el resultado de tratamientos tecnológicos, que hacen que se incremente localmente la intensidad de las tensiones nominales.

En los árboles sometidos a sollicitaciones externas, particularmente cuando las mismas originan tensiones variables, tanto en su magnitud como en su signo, y se producen esfuerzos de torsión, de flexión, o de flexión y torsión combinadas, como la transmisión de la potencia se realiza a través de los elementos montados sobre el árbol, que requieren estar vinculados al mismo y posicionados axialmente, en el diseño y proyecto inevitablemente se introducen discontinuidades en las secciones y entallas diversas, para satisfacer adecuadamente esta necesidad, que determina un árbol perfilado con concentradores de tensión.

Budynas [1] indica en el caso de ejes y árboles, la realización de diferentes diseños, con la finalidad de disminuir la concentración de esfuerzos en la garganta del resalto, tales como el corte de penetración de radio de acuerdo grande en la pared vertical del resalto; la incorporación de una ranura rebajada de radio grande en

el encuentro del resalto, o de una ranura rebajada de radio grande en la parte superior en la cercanía del resalto.

La primera de las propuestas, cuenta con otros autores que la sustentan históricamente; Cazaud [2] Orlov [3] y Pilkey [4] entre otros, pero la misma requiere un mecanizado del rebaje en la pared vertical del resalto que se dificulta materializar. Una ranura rebajada de radio grande en el encuentro de resalto, que además permite la salida de herramienta de rectificar, debilita la sección de menor diámetro, por lo que esta opción puede llevar a que haya que aumentar el radio del árbol, y por ende el tamaño del rodamiento, para compensar esta disminución. No obstante si en el diámetro menor irá calado un anillo montado a presión, esta solución, conlleva una atenuación de los efectos de fatiga entre el 13 y 16 % [2]. La tercera propuesta, tallar una ranura semicircular en la parte superior del resalto [5-6] resulta una solución conveniente, desde el punto de vista técnico y tecnológico, dado que la misma suaviza las líneas de flujo del esfuerzo, atenuando el efecto de la concentración de tensiones y no reviste dificultades para el mecanizado. Por ello se adopta este diseño para este estudio como el más racional, para evaluar la influencia de esta entalla adicional sobre el estado tensional resultante en los modelos de árboles considerados. Debemos destacar que la bibliografía que atiende el análisis de la influencia producida por esfuerzos de flexión y de torsión, asume similitud en algunos casos con las concentraciones debidas a los esfuerzos de torsión por falta de datos experimentales, en particular el coeficiente de tamaño [6], aunque por otro lado falta desarrollo de la influencia combinada debida a la acumulación de los concentradores de tensión. En consecuencia, este estudio es una continuación del trabajo de la referencia [7] y se presenta una primera parte con el análisis debido a esfuerzos solo de torsión constante.

Se conoce que el incremento de las tensiones reales máximas, pueden alcanzar valores muy significativos en ejes y árboles sometidos a esfuerzos de flexión. Los factores teóricos de incremento para la tensión máxima pueden llegar valores del orden de 3 y más veces, mientras que en árboles sometidos a esfuerzos de tor-

sión, este incremento de tensiones suele estar en el orden de 2 ó 3, dependiendo de las distintas relaciones geométricas y del carácter de las discontinuidades. La zona afectada por el o los concentradores acumulados, resultan trascendentes para el comportamiento a fatiga de los elementos de máquinas y en consecuencia es de suma importancia, el disponer de datos actualizados [8], que permitan realizar consideraciones de diseño y análisis más ajustados, actuando sobre la causa desde el diseño.

Cabe acotar además, que en la literatura actual, se encuentran publicaciones [9-10], sobre el diagnóstico de fallas prematuras de elementos mecánicos, que evidencian las deficiencias de diseño en la consideración de los concentradores de tensiones.

2. Objetivo

El objetivo del presente estudio es analizar los efectos combinados en la valoración del factor teórico o geométrico de concentración de tensiones, K_T , del radio de acuerdo " r " en el cambio de sección debido al resalto (u hombro) que sirve de tope a un rodamiento en un árbol perfilado y la incorporación de una ranura de radio " R " en una ubicación previa al resalto, en la búsqueda de obtener la condición más favorable en la atenuación de los efectos de la fatiga.

Para ello, se consideraron diferentes diámetros de cambio de sección, radios de acuerdo entre el resalto y el cabo del árbol, radios en la ranura, la posición relativa de la misma respecto del ancho del resalto y la relación de diámetros D/d .

Al modificar el diseño y proyecto de este elemento de transmisión, se procura encontrar formas racionales y disposiciones favorables para actuar sobre las causas que generan estas tensiones resultantes y minimizar el coeficiente geométrico del concentrador de tensiones ya que si bien la bibliografía especializada en el tema menciona que la incorporación de una ranura semicircular suaviza las líneas de flujo del esfuerzo, no suministra información en cuanto a la ubicación y dimensiones de la misma.

3. Metodología

En este trabajo, se presentan los resultados obtenidos a través del análisis estático lineal de tensiones, y la consideración de los incrementos de tensiones localizados sobre la tensión nominal, de modelos de árboles circulares no lisos con diferencia de diámetros en secciones contiguas, una ranura circular en zona previa al resalto, siendo los parámetros relevantes de estudio, el radio de acuerdo "r" en la zona de vínculo de secciones de diámetros diferentes, la profundidad de la entalla circular, de radio "R" de incidencia y la ubicación de la misma, y la influencia de la altura $[(D-d)/2]$ y el ancho "L" del resalto.

El análisis lineal de tensiones se efectuó con un software basado en el Método de los Elementos Finitos, comercialmente conocido como Algor 23 [11]

4. Descripción de los modelos

El modelo de análisis propuesto corresponde a la geometría de un árbol de 2800 mm de longitud total, constituido por tres tramos de sección circular. El tramo central es de 2000 mm de longitud y diámetro D y dos tramos extremos de longitud 400 mm cada uno y diámetro $d = 200$ mm. Por la simetría de esta pieza, el modelo analizado se simplificó a un tramo de diámetro D como primera variable, de 1000 mm de longitud y otro de diámetro $d = 200$ mm = constante y 400 mm de longitud. Se considera con todos los grados de libertad restringidos (empotrado) en el extremo de mayor diámetro (D), y con radio de acuerdo circular r, como segunda variable, en el punto de discontinuidad de la sección transversal (Figura 1) y radio de ranura $R = [(D-d)/2]$, como variables relacionadas.

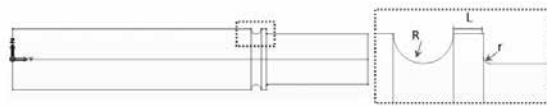


Figura 1 Esquema con las variables consideradas

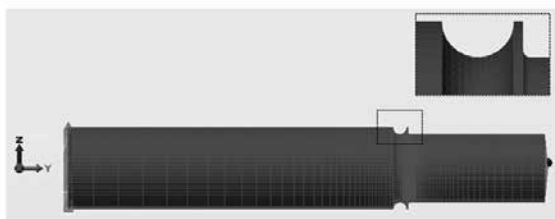


Figura 2 Geometría del modelo con ranura, con restricciones y carga aplicada en el extremo no empotrado

Las propiedades del material utilizado son módulo elástico a corte $G = 8 \cdot 10^{10}$ N/m², Coeficiente de Poisson 0,29; módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m², tensión de fluencia $3,10 \cdot 10^8$ N/m² y tensión de rotura $5,65 \cdot 10^8$ N/m². El valor de las tensiones y desplazamientos, se obtuvieron adoptando como estado de carga, un momento torsor de 40000 Nm, aplicado en el extremo libre del árbol, al tomar como referencia el árbol de un tambor de elevador de cangilones con motor aplicado de 400 CV y con giro de 50 r.p.m, de donde también se tomaron las dimensiones utilizadas en los modelos geométricos. La aplicación de la cupla se modeló como carga remota.

En la sección de menor diámetro, va montado un rodamiento oscilante de rótulas, de diámetro de pista interior de 200 mm, que respalda con el resalto.

Se dibujaron y analizaron, modelos con igual geometría y dimensiones que el árbol mostrado en la Figura 1 y Figura 2., a los que se les incorporó la ranura circular de alivio, de radio R, sobre la sección de mayor diámetro (D), a una distancia L del resalto. En este estudio se estableció L como variable, a partir de un L min, contemplando el caso en que la pista del rodamiento apoye bajo carga sobre el resalto, a fin de asegurar una adecuada resistencia y por otra parte, posicionada de manera tal que le permita minimizar, al suavizar las líneas de flujo de los esfuerzos, las máximas tensiones generadas en la zona del cambio de sección.

Las dimensiones del radio de acuerdo (r), el ancho del resalto (L) y $(D-d)/2$ del árbol se fueron variando a los efectos de un proyecto más racional, considerando la eventual aplicación de un aro de apoyo entre el resalto y el rodamiento como mejora del diseño, si fuera necesario por si el resalto supera la altura de la pista interior del rodamiento, para permitir la aplicación de la herramienta extractora correspondiente, y posibilitar el desmontaje apropiado del mismo.

Para la obtención del valor de la tensión de referencia o tensión nominal, se construye y analizó el modelo de un árbol, de sección circular constante de diámetro $d = 200$ mm, longitud 1400 mm, empotrado en un extremo y sometido a un momento torsor de 40000 Nm., y se

obtuvo como valor de referencia o nominal de $4,29 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$.

Teniendo en cuenta las consideraciones expresadas en el punto anterior se construyeron y analizaron un total de 62 modelos con diámetros de sección mayor (D) de valores: 220, 230, 240 y 270 mm y radios de acuerdo (r) de valores 2 y 4 mm y relaciones entre el ancho de resalto y la altura del mismo, $L/[(D-2)/2]$, presentadas en la tabla 1

Tabla 1 – Valores de las relaciones utilizadas en los modelos analizados

d = 200 mm							
Relación entre radio de la ranura circular y altura del resalto $R / [(D-d) / 2] = 1$							
D = 220 mm		D = 230 mm		D = 240 mm		D = 270 mm	
Relación entre diámetros							
D/d = 1,10		D/d = 1,15		D/d = 1,20		D/d = 1,35	
Radios de acuerdo zona de transición entre D y d							
r = 2 mm		r = 4 mm		r = 2 mm		r = 4 mm	
Relación entre Distancia del inicio de la ranura al resalto y la altura del resalto $L / [(D-d) / 2]$							
0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,14	0,14
0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,29	0,29
0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,43	0,43
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,57	0,57
2,00	2,00	2,00	2,00	2,50	2,50	1,00	1,00
3,00	3,00	3,00	3,00	5,00	5,00	1,43	1,43
5,00	5,00	5,00	5,00	7,50	7,50	2,00	2,00
10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	2,86	2,86
						4,29	4,29
						7,00	7,00
						10,00	10,00

El cálculo del KT mediante la aplicación de la Ecuación (1) se realizó considerando las tensiones de Von Mises, obteniéndose iguales resultados con el uso de las tensiones de Tresca.

$$K_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}xima}}{\sigma_{nominal}} \quad \acute{o} \quad K_t = \frac{\tau_{m\acute{a}xima}}{\tau_{nominal}} \quad (1)$$

Este factor de concentración de tensiones, se lo determina considerando un comportamiento elástico lineal del material, por eso se lo conoce como *factor teórico* o *factor geométrico* que depende solo de la geometría de la pieza considerada y del tipo de sollicitación, siempre que el estado de cargas analizado sea estático, manteniéndose las tensiones dentro del límite elástico del material.

5. Análisis de los resultados obtenidos

Los valores de referencia del factor de concentración de tensiones para los modelos sin ranura, Figura 3, fueron tomados de la bibliografía [7] que corresponde al primer trabajo sobre la temática presentado por los autores, con la incorporación de los valores de KT para la relación $D/d = 1,35$. Cabe mencionar que las diferencias

porcentuales entre los valores de esta gráfica y los publicados en la literatura [1] son menores al 5 %.

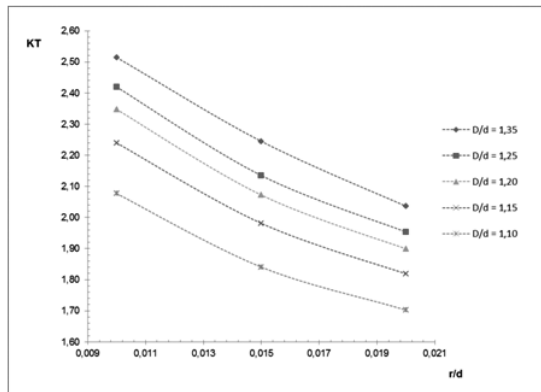


Figura 3 K_t en función de r/d y D/d

Se dispuso un modelo tipo para el análisis, de acuerdo a Figura 4, y se registraron los valores de las tensiones de Von Mises en la zona del acuerdo y del fondo de la ranura, con el objetivo de estimar los correspondientes valores del coeficiente de concentración de tensiones.

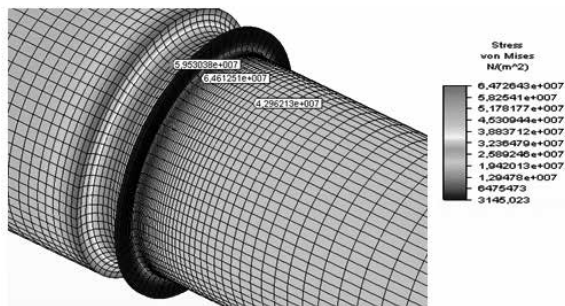


Figura 4 Tensiones de Von Mises para el modelo con $D/d = 1,20$; $r = 4$ [mm]; $R = 20$ [mm]; $L/[(D-d)/2] = 0,25$

Se agrega la Tabla 2, demostrativa de algunos de los valores obtenidos

Tabla 2– Valores de las tensiones de Von Mises en los modelos analizados con $D/d = 1,10$

TVM* Liso	42730138							
r [mm]	2	4	2	4	2	4	2	4
d [mm]	200	200	200	200	200	200	200	200
D [mm]	220	220	220	220	220	220	220	220
MODELOS CON RESALTO SIN RANURA								
TVM s/ranura con resalto	89347007		29737447					
KT	2,09		1,71					
MODELOS CON RANURA Y RESALTO								
TVM Resalto	69881098	60853362	74551113	63971582	82036348	68294001	88118935	72084163
TVM Ranura	63457742	63653078	65196745	64900625	67156708	67430261	70071022	70232315
r/d	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02
D/d	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
KT resalto	1,64	1,42	1,74	1,50	1,92	1,60	2,06	1,69
KT ranura	1,97	1,98	2,02	2,02	2,09	2,09	2,18	2,18
L [mm]	5		10		20		50	
L/Resalto	0,5		1		2		5	
TVM*	Tensiones de Von Mises en N/m²							



Tomando en cuenta los valores que surgen del análisis de los distintos modelos, se construyeron las gráficas que se presentan a continuación. En la Figura 5, se observan las curvas que representan el factor teórico de concentración de tensiones en el radio de acuerdo, KT , para diferentes relaciones entre el ancho (L) y la altura $[(D-d)/2]$ del resalto.

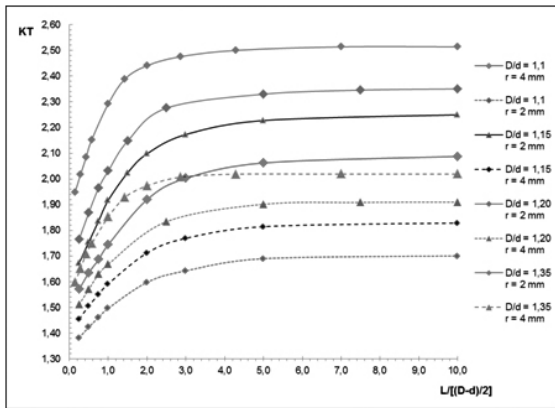


Figura 5 KT en función de la ubicación de la ranura, para $r=2$ y 4 mm, $R= (D-d)/2$ y diferentes relaciones D/d

Cada una de estas curvas corresponde a una relación de diámetros (D/d) y un valor dado de radio de entalla (r), en todos los casos el radio de la ranura se consideró igual a la altura del resalto. Para los radios de acuerdo considerados, $r=2$ y 4 mm y para todas las relaciones D/d estudiadas, las curvas presentan un incremento aproximadamente lineal del valor de KT hasta valores de la relación $L/[(D-d)/2]$ menores a 2, a partir del cual tiende al valor del KT del árbol sin ranura.

En la Figura 6 se representa la zona de variación lineal del KT para las relaciones D/d analizadas y radio de acuerdo de 2 mm, en la gráfica izquierda, en función de la ubicación de la ranura, representada con la relación entre el alto y ancho del resalto y, en la gráfica derecha, del ancho del resalto. En la grafica izquierda, se observa que la pendiente se incrementa con la relación D/d , ello se justifica en razón de la mayor diferencia en la ubicación el fondo de la ranura respecto del resalto, al variar la ubicación de la ranura. En la gráfica de la derecha la pendiente disminuye con la relación entre diámetros D/d , igual tendencia muestran las curvas para $r=4$

mm. Ambas gráficas marcan la influencia de la ubicación de la ranura en la disminución del valor de KT en el acuerdo.

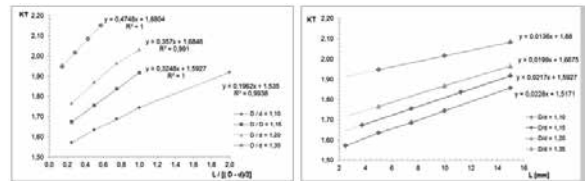


Figura 6. Variación del KT para radio de acuerdo igual a 2 mm en función de la ubicación de la ranura

Es de hacer notar, que el comportamiento observado en la variación del KT , correspondiente al fondo de la ranura, es similar al del concentrador en el acuerdo.

Con los datos obtenidos y con el objeto de poder cuantificar el efecto de introducir en el diseño y proyecto una ranura adyacente al resalto, se generó un gráfico, Figura 7, que valoriza la variación porcentual del KT , vinculando los valores obtenidos para los modelos con ambos concentradores, entalla y ranura, con los valores del factor teórico de concentración de tensiones para el caso de la geometría sin ranura, en función de la relación $L/[(D-d)/2]$. Se observa que la gráfica presenta una tendencia decreciente para todas las relaciones D/d a medida que se incrementa el valor de la relación $L/[(D-d)/2]$.

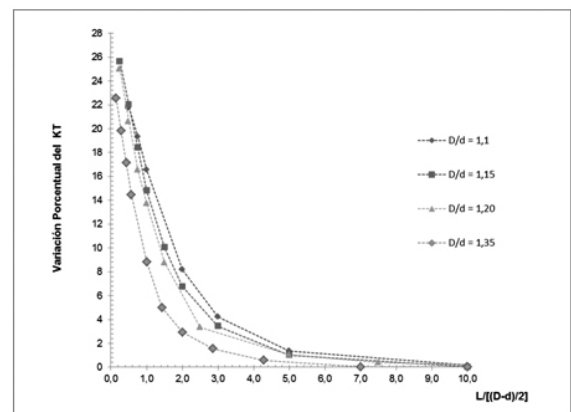


Figura 8 Variación porcentual del KT en la zona del acuerdo para radio de acuerdo 2mm

Se puede inferir que la influencia de la ranura de alivio sobre la disminución de las tensiones máximas, hasta valores de relaciones de ancho de resalto igual a la mitad de la altura del mismo $L/[(D-d)/2] = 0,5$, es significativa para todas

las relaciones D/d estudiadas, variando entre el 14% al 26%. A medida que incrementamos el valor del ancho del resalto, es decir a mayores valores de la relación $L/[(D-d)/2]$, lo que implica que la ranura estará más alejada de la zona donde se ubica el otro concentrador de tensiones, se minimiza la influencia acumulada de ambos concentradores sobre el estado tensional en dicha zona.

6. Conclusiones

La metodología de análisis que se presenta intenta colaborar con el diseño de concentradores de tensiones cuantificando la influencia que poseen las ranuras de alivio en árboles perfilados. Si bien durante años, se han realizado múltiples estudios para determinar ecuaciones y ábacos que permitan colaborar con el diseño de estos elementos [1,3-4]. No obstante, estas ecuaciones y ábacos, que se presentan en la bibliografía especializada, no cubren las situaciones de combinación de concentradores de tensiones, por cuanto las consideraciones realizadas tienen utilidad en el diseño práctico de estos elementos mecánicos.

Los resultados a los que se arribó en este trabajo indican que el efecto acoplado de discontinuidades geométricas, en la configuración estudiada, no incrementa los valores del factor de concentración de tensiones respecto del que cada uno de ellos produce actuando en forma independiente. Este comportamiento, en estudios realizados sobre placas planas con discontinuidades geométricas combinadas, ya fue observado por otros autores [8].

Asimismo se muestra que la influencia en la disminución del concentrador de tensiones, al incorporar una ranura, depende fuertemente de la ubicación y el tamaño de la misma.

Este es el segundo trabajo realizado sobre este tema por los autores y se continuará investigando con el objetivo de considerar la influencia de otras variables por cuanto se entiende que un análisis detallado resulta de gran interés para la prevención, desde el diseño, de fallas prematuras, vinculadas con la fatiga así como a los efectos de la re-ingeniería de piezas colapsadas.

7. Referencias

- [1] Budynas R.G. and Nisbett J.K. Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Novena Edición en Español, Mac Graw Hill, México, 2012.
- [2] Cazaud, R. La fatiga de los metales, primera edición en español, Aguilar, España, 1957
- [3] Orlov P., *Ingeniería de Diseño, Tomo 8*, segunda edición en español, M.I.R., URSS, 1986
- [4] Pilkey W, Pilkey D, Peterson R. Peterson's stress concentration factors. Second edition; John Wiley & Sons; USA; 1997.
- [5] Decker, Manual del Ingeniero Técnico: Elementos de Máquinas Vol. XIII, primera edición en español, Urmo, 1979
- [6] Stiopin P.A., *Resistencia de materiales*, Segunda edición en español, M.I.R., 1976
- [7] Robles S. I. y Ortega N. F., Diseño de concentradores de tensiones en elementos mecánicos, mediante las tensiones y desplazamientos superficiales; ENIEF: Noviembre 2013
- [8] Amé R.M., Dasso G.M. and Lezama D. Tensiones localizadas producidas por discontinuidades geométricas combinadas: *Revista Cubana de Ingeniería*, 2(2):43-48, 2011.
- [9] Van Zyl G. and Al-Sahli A. *Failure analysis of conveyor pulley shaft Case Studies: Engineering Failure Analysis*, 1:144–155, 2013.
- [10] Pavan, A., Vikrant K., Swamy M. and Jayaraman G. Root cause analysis of bowl-mill pinion shaft failures, *Case Studies: Engineering Failure Analysis*, 1:103–109, 2013.
- [11] ALGOR 23, Profesional Mech/VE. *Docu-tech, linear stress and dynamics, reference Division*. Pittsburgh. Pennsylvania, 2010.

Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al Departamento de Ingeniería y a la SGCyT de la UNS y a la UTN FRRo, por el apoyo brindado para el desarrollo de estas investigaciones.