

Método analítico de detección de fisuras en vigas vibrantes

Javier L. Raffo y Marcos R. Carrizo

Facultad Regional Delta – Universidad Tecnológica Nacional . jraffo@frd.utn.edu.ar

Resumen

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales de vibración obtenidas experimentalmente en análisis dinámicos.

En este trabajo se presenta un análisis de sensibilidad de un método analítico de detección de fisura en una viga Euler-Bernoulli a partir de valores de frecuencias naturales obtenidas previamente. También se realizan propuestas de mejoras del método de detección.

Por otra parte, se realizan análisis de detección de fisura en vigas a partir de valores de frecuencias naturales obtenidas previamente con: un método analítico, mediciones experimentales con acelerómetros y con el programa Abaqus de elementos finitos.

El modelo analítico propuesto se desarrolla obteniendo el problema de contorno y transición a partir de realizar el cálculo de variaciones al funcional energético de la viga en estudio para finalmente obtener la ecuación de frecuencias que es resuelta en forma exacta. Las mediciones experimentales se realizan con acelerómetros y equipamiento adecuado para obtener la respuesta en frecuencia de las vibraciones libres de la viga analizada con técnicas de análisis de vibraciones mecánicas. Por otra parte, se realizan modelos de elementos finitos con el programa Abaqus y se obtienen los valores numéricos de las frecuencias naturales.

Se presentan resultados de análisis de sensibilidad de la metodología analítica propuesta para detectar una fisura, a partir de valores previos de frecuencias naturales obtenidos con la solución exacta. Se presentan valores obtenidos con el método inverso a partir de valores de fre-

cuencias naturales determinadas experimentalmente, con el programa Abaqus y obtenidos en forma exacta.

Palabras Claves: Vibraciones de vigas, Detección de fisuras, Frecuencias naturales, Análisis de sensibilidad.

Referencias

[1] Javier L. Raffo - Marcos R. Carrizo, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013), "Vibraciones de vigas y pórticos ante la presencia de fisuras. Implementación del problema inverso", *Mecánica Computacional Vol XXXII* págs. 1715-1735, Mendoza, 2013.

1. Introducción

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales de vibración. Especialmente para el área de mantenimiento predictivo, preventivo e integridad estructural.

Sin la intención de realizar un análisis exhaustivo, a continuación se presentan algunos de los trabajos de temática relacionada realizados al momento. En cuanto al estudio del problema inverso, Lele y Maiti (2002) [2] realizaron un estudio de ingeniería inversa, para vigas cortas, luego Lin et al. (2002) [3] extendió el estudio a múltiples fisuras y más adelante Khaji et al. (2009) [4] implementó un método para identificar fisuras analíticamente para algunos casos particulares de vigas Timoshenko, a partir de resultados previos obtenidos mediante análisis con el método

de elementos finitos. En estos trabajos, la fisura es implementada mediante un modelo de rótula con una restricción elástica rotacional.

Por otra parte, la obtención rigurosa del problema de contorno y transición para el caso de restricciones generales en los extremos y en un punto intermedio para el caso de una viga Euler-Bernoulli fue obtenido por Grossi y Quintana (2008) [5].

El problema inverso para el caso de vigas Euler-Bernoulli con restricciones elásticas generales en los extremos y en puntos intermedios fue tratado por Raffo y Carrizo (2013) [1], donde se propuso un método de detección de fisuras a partir de valores de frecuencias naturales obtenidos en forma directa con la solución exacta, con valores medidos experimentalmente y con valores obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos.

En este trabajo, se propone extender el estudio realizado por Raffo y Carrizo (2013) [1] incluyendo un análisis de sensibilidad. Específicamente, se proponen diferentes procedimientos sistematizados para la implementación del problema inverso y se realiza una comparación de los resultados obtenidos con dichos procedimientos. Se realiza además, un estudio paramétrico para el caso en que la fisura se encuentra ubicada alrededor de puntos de inflexión o nodos de las diferentes formas modales de la viga con fisura.

Se presentan resultados de la posición y profundidad de fisura obtenidas con el problema inverso a partir de los valores de frecuencias naturales obtenidas con mediciones experimentales, con el programa Abaqus y con la solución exacta

2. Expresiones del Problema de Contorno y Transición de una Viga Euler-Bernoulli

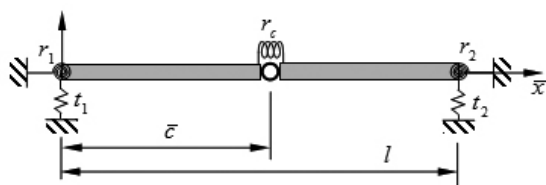


Figura 1: Viga de tres tramos analizada.

Sea una viga de longitud l , de dimensiones uniformes a lo largo de su eje, que tiene sus ex-

tremos restringidos elásticamente y tiene una rótula restringida elásticamente contra rotación ubicada en $\bar{x} = \bar{c}$, como se muestra en la Figura . La viga está compuesta por dos tramos, que corresponden a los intervalos $0 \leq \bar{x} \leq \bar{c}$ y $\bar{c} \leq \bar{x} \leq l$ y respectivamente. Se asume que los extremos y las rótulas intermedias están restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Las restricciones rotacionales están definidas por los parámetros r_1, r_2 y r_c , y las restricciones traslacionales por t_1, t_2 y t_c . Adoptando valores adecuados de r_1, r_2 y t_1, t_2 se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre). Utilizando valores adecuados de r_c se puede considerar los efectos de una fisura en el punto intermedio $\bar{x} = \bar{c}$.

Para analizar el desplazamiento transversal de la viga en estudio, suponemos que la posición vertical de la viga en cualquier instante de tiempo t está descrita por la función $w = w(\bar{x}, t)$, $\bar{x} \in [0, l]$

Por lo tanto, la ecuación diferencial y el problema de contorno y transición de la viga analizada cuando se analiza el problema de vibraciones libres es ([5,6,1]):

$$I w^{(4)}(\bar{x}) + \frac{d^4 w}{d\bar{x}^4}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in G_i, i = 1, 2, t \geq 0. \tag{1}$$

$$R_1 \frac{dw}{d\bar{x}}(0) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(0), \tag{2}$$

$$T_1 w(0) = - \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(0), \tag{3}$$

$$w(\bar{c}^-) = w(\bar{c}^+), \tag{4}$$

$$R_c \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(\bar{c}^+) - \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}^-) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(\bar{c}^-), \tag{5}$$

$$R_c \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(\bar{c}^+) - \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}^-) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(\bar{c}^+), \tag{6}$$

$$\frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(\bar{c}^-) = \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(\bar{c}^+), \tag{7}$$

$$R_2 \frac{dw}{d\bar{x}}(l) = - \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(l), \tag{8}$$

$$T_2 w(l) = \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(l), \tag{9}$$

donde se introdujo el cambio de variables

$$x = \bar{x} / l, \quad c = \bar{c} / l, \quad \text{con } T_i = \frac{t_i l^3}{EI}, \quad R_i = \frac{r_i l}{EI}, \quad i = 1, 2, \text{ y } R_c = \frac{r_c l}{EI},$$

E es el módulo de Young del material de la viga,

$I = bh^3 / 12$ es el momento de inercia de la sección, b y h son la profundidad y la altura de la sección rectangular.

La (1) a (9) se obtiene luego de realizar el cálculo de variaciones y de implementar el método de separación de variables para realizar un análisis de autovalores.

Como el dominio del sistema con el cambio de variables considerado es $(0,1)$, que es un intervalo abierto j , en el borde está dado por dos puntos, $\{0,1\}$.

En consecuencia, c es un punto interior y $()$ a $()$ son las condiciones en las transiciones. Por lo tanto $()$, $()$, $()$ y $()$ corresponden a las condiciones de contorno.

Para simular una fisura con una restricción rotacional interna, se adopta $0 < r_c < \infty$. Mas precisamente, para una fisura simple abierta como la de la Figura, se la puede modelar como una rótula elástica cuyo valor es (Ostachowicz y Krawczuk, 1991) [6]

$$r_c^{(s)} = \frac{Ebh^2}{72pf^2(h)}, \quad (10)$$

donde $h = a / h$ es la relación entre la profundidad de la fisura a y la altura de la viga. La función $f(h)$ para una fisura abierta a un solo lado de la viga es (ver Figura).

$$f(h) = 0.6384 - 1.035h + 3.7201h^2 - 5.1773h^3 + 7.553h^4 - 7.332h^5 + 2.4909h^6, \quad (11)$$

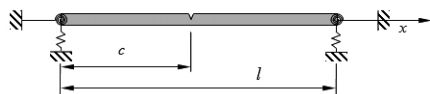


Figura 2: Viga con una fisura superficial a un solo lado.

La solución exacta del problema presentado por las expresiones (1) a (9) está dada por:

$$w_{1n}(x) = A_1 \cosh l_n x + A_2 \sinh l_n x + A_3 \cos l_n x + A_4 \sin l_n x, \quad "x \hat{\in} \hat{c}, 1 \hat{c} \hat{c} \quad (12)$$

$$w_{2n}(x) = A_5 \cosh l_n x + A_6 \sinh l_n x + A_7 \cos l_n x + A_8 \sin l_n x, \quad "x \hat{\in} \hat{c}, 1 \hat{c} \hat{c} \quad (13)$$

donde $l_n^4 = \frac{rA}{EI} \omega_n^4$, y w_n es el n -ésimo modo de vibrar de la viga analizada

Al reemplazar (12) y (13) en (2) a (9), y al buscar una solución no trivial, el determinante del sistema de los coeficientes A_i debe ser igual a cero, por lo tanto se obtiene la ecuación de

frecuencias

$$G(T_1, R_1, T_2, R_2, R_c, c, l_n) = 0. \quad (14)$$

3. Método Analítico de Detección de Fisuras (MADF)

Se propone resolver el problema inverso de determinación de posición y profundidad de la fisura a partir de conocer los primeros valores del coeficiente de frecuencias l_n .

El procedimiento del método inverso consiste en conocer los valores de las restricciones elásticas de los extremos de la viga T_1, R_1, T_2, R_2 . Tener en forma directa dos o más valores de l_n . Luego, se introducen los valores de T_1, R_1, T_2, R_2 y l_n antes descriptos en (14) y se obtiene

$$H(R_c, c) = 0. \quad (15)$$

Luego, de (15) se obtienen los valores de R_c en función de $c \hat{\in} \hat{c}, 1 \hat{c} \hat{c}$ que se presentan graficados en la Figura 3a, para los valores de l_n con

$$n = 1, 2, K, 6.$$

Para ejemplificar el procedimiento, se analiza el caso de una viga articulada en ambos extremos con una fisura ubicada en $c = 0.29$, con $h = 0.25$, que se obtuvieron con la solución exacta los primeros seis valores de l .

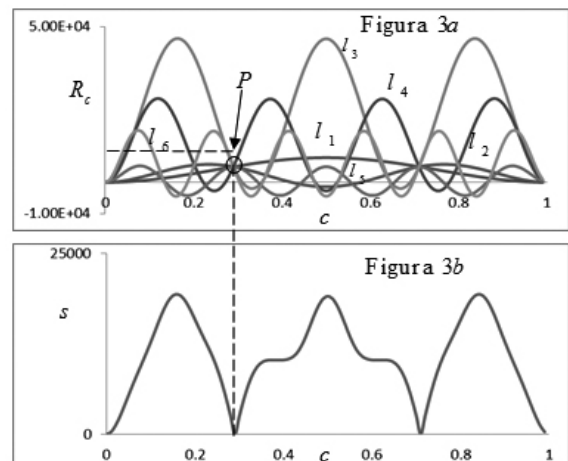


Figura 3: a) Gráfico de R_c en función c con $c \hat{\in} \hat{c}, 1 \hat{c} \hat{c}$ para los primeros seis valores de l obtenidos con la expresión (15); b) Gráfico de s en función de c con $c \hat{\in} \hat{c}, 1 \hat{c} \hat{c}$ obtenido con la expresión (16).

En la Figura 3a, se grafican los valores de R_c en función c con $c \hat{\in} \hat{c}, 1 \hat{c} \hat{c}$ para los primeros seis valores de l obtenidos con la expresión (15). Se

observa que al realizar el procedimiento descrito, en el punto P coinciden las seis gráficas, por lo cual este punto es solución de (15), de donde se obtiene en forma directa la posición de la fisura c y con el valor de R_c y (10) se obtiene la profundidad de la fisura h .

Para asegurar la posición del punto P en la Figura 3b se grafica el valor de la desviación estándar de la muestra s para los valores de R_c representados en la Figura 3a, siendo desvío estándar

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_c^i - \bar{R}_c)^2}{(n-1)} \quad (16)$$

donde R_c^i denota el valor de R_c para el i -ésimo modo, \bar{R}_c denota el valor medio de los R_c para $n = 6$.

En la Figura 3b se grafican los valores s de en función de los valores supuestos de c con $c \in [0, 1]$. Se observa que s tiene dos valores casi nulos en los extremos de la viga, en $c = 0.29$ y en $c = 0.71$ por ser una viga de condiciones de contorno simétrica. Por lo tanto, presuponiendo el lado en que se encuentra la fisura, se obtiene que $c = 0.29$ y $R_c = 5025.527$. Finalmente de (10) resulta $h = 0.249$.

3.1. Optimización propuesta del MADF

En los casos en que la fisura se encuentra en un punto de inflexión de las formas modales, de la solución propuesta (12) y (13) se observa que el momento correspondiente al punto mencionado es nulo, por lo tanto, la forma modal de la viga no se ve afectado por el valor de R_c . Por esto, cuando se predice el valor de c y R_c , el MADF no logra evidenciar con valores razonables a R_c , y se procede a descartar la forma modal en cuestión.

En función de lo mencionado, se proponen cuatro metodologías para optimizar el MADF: La primera es considerar los seis primeros modos en el MADF (6 modos), la segunda es considerar solamente los primeros tres modos impares (modos impares), la tercera es considerar los primeros tres modos pares (modos pares) y la cuarta metodología propuesta de optimización consiste en descartar los modos que presentan valores de R_c evidentemente mayores respecto a los obtenidos con los otros modos (propues-

to). Los valores de R_c que se descartan son del orden de 8 órdenes de magnitud mayor al resto de los modos.

4. Resultados

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, A denota que el extremo está articulado y L denota que el extremo está libre. Como ejemplo, si se indica la condición de borde de una viga E-A, denota que el primer tramo, en $x = 0$, el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en $x = 1$ el extremo se encuentra articulado.

Se presentan los valores del coeficiente de frecuencia l , determinados con la solución exacta, por el método de elementos finitos o en forma experimental, donde:

$$l^4 = \frac{rA}{EI} \omega^2 l^4 \quad (17)$$

Se presentan los valores de c y h obtenidos con el MADF, y c_{MADF} y h_{MADF} respectivamente. También, los valores del error relativo porcentual en la determinación de c y de h , dados por

$$e_c = \frac{|c_{MADF} - c|}{c} 100\% \quad \text{y} \quad e_h = \frac{|h_{MADF} - h|}{h} 100\% \quad (18)$$

Para obtener los valores de l con el programa de elementos finitos Abaqus, se utilizó un modelo de sólido homogéneo en 2D con elementos rectangulares planos de 8 nodos, bi-cuadráticos de tensiones planas identificado como CPS8. Se dibujó en el plano el perfil de la viga, con la fisura como una discontinuidad con un semicírculo en el extremo. En la Figura se muestra la densidad de la malla en la zona afectada por la presencia de la fisura.

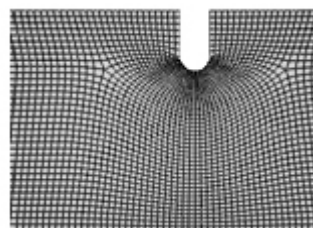


Figura 4: Detalle de la malla en la zona de la fisura.

Para obtener los valores de l experimental-

mente se utilizaron vigas con mecanizados que emulan fisuras abiertas superficiales soportadas con mordazas para representar diferentes condiciones de contorno clásicas. Se obtuvo la respuesta en frecuencia de las vibraciones libres de la viga analizada con técnicas de análisis de vibraciones mecánicas. El equipo empleado consta de un acelerómetro, marca Brüel & Kjær modelo 4374. Un preamplificador de carga Brüel & Kjær modelo NEXUS 2692-C de 4-canales. Una bornera National Instruments SCC-68 con una placa digitalizadora/adquisidora National Instruments PCI-6132 y el programa Signal Express de National Instruments para realizar el análisis de vibraciones mecánicas.

En la Tabla 1 se presentan los primeros seis valores de l , para una viga A-A obtenidos con la solución exacta para diferentes valores de c y h y los correspondientes valores de c , h , e_c y e_h

obtenidos con el MADF para los cuatro métodos de optimización descritos en el inciso 3.2.

Para la condición A-A, existe en $x = 0.25$ un punto de inflexión en la forma modal para el cuarto modo de vibración, en torno a este se propone realizar un análisis en la sensibilidad del MADF. En la Tabla 2 se analizan los casos en que $c = 0.22, 0.23, 0.25, 0.27$ y 0.29 , a su vez $h = 0.01, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$. Se presentan los primeros seis valores de l y los valores de c y de h terminados con el MADF propuesto.

1	0.4	0.99	1.843	5.832	8.822	11.37	15.708	17.386	6 Modos	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Pares	0.4	0.99	<1	2.39E-03
									Propuesto	0.4	0.99	<1	1.43E-03
2	0.43	0.99	1.826	6.021	8.439	11.77	15.336	17.532	6 Modos	0.43	0.99	<1	3.42E-06
									Modos Impares	0.43	0.99	<1	5.50E-06
									Modos Pares	0.43	0.99	<1	1.33E-06
									Propuesto	0.43	0.99	<1	3.42E-06
3	0.45	0.99	1.818	6.135	8.226	12.065	14.9	17.939	6 Modos	0.45	0.99	<1	9.70E-03
									Modos Impares	0.45	0.99	<1	3.36E-05
									Modos Pares	0.45	0.99	<1	1.94E-02
									Propuesto	0.45	0.99	<1	9.70E-03
4	0.48	0.99	1.811	6.257	8.015	12.459	14.346	18.621	6 Modos	0.48	0.99	<1	1.47E-06
									Modos Impares	0.48	0.99	<1	2.12E-06
									Modos Pares	0.48	0.99	<1	8.16E-07
									Propuesto	0.48	0.99	<1	1.47E-06
5	0.5	0.99	1.809	6.283	7.972	12.566	14.205	18.85	6 Modos	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.5	0.99	<1	1.33E-04
									Modos Pares	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Propuesto	0.5	0.99	<1	1.33E-04
6	0.4	0.75	2.075	5.863	8.857	11.41	15.708	17.426	6 Modos	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Pares	0.4	0.75	<1	2.80E-07
									Propuesto	0.4	0.75	<1	1.50E-07
7	0.45	0.75	2.048	6.147	8.289	12.084	14.926	17.96	6 Modos	0.45	0.75	<1	8.67E-08
									Modos Impares	0.45	0.75	<1	9.74E-08
									Modos Pares	0.45	0.75	<1	2.71E-07
									Propuesto	0.45	0.75	<1	8.67E-08
8	0.5	0.75	2.039	6.283	8.049	12.566	14.253	18.85	6 Modos	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.5	0.75	<1	5.47E-07
									Modos Pares	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Propuesto	0.5	0.75	<1	5.47E-07

Tabla 1: Primeros seis valores de l obtenidos con la solución exacta para vigas A-A con diferentes valores de c y h y los correspondientes valores de c , h , e_c y e_h obtenidos con el MADF para los cuatro métodos de optimización propuestos.

Tabla 2: Primeros seis valores de l obtenidos con la solución exacta para vigas A-A con diferentes valores de c y h y los correspondientes valores de c , h , e_c y e_h obtenidos con el MADF propuesto.

Caso	c	h	Método Directo						MADF				
			l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	c	h	e_c	e_h	
16			0.010	3.141	6.282	9.425	12.566	15.706	18.848	0.29	0.01	<1	1.31E-04
16			0.250	2.997	5.995	8.993	11.991	14.989	17.987	0.29	0.25	<1	3.20E-07
17	0.290		0.600	2.621	5.241	7.861	10.481	13.101	15.721	0.29	0.6	<1	6.09E-08
18			0.750	2.210	4.420	6.630	8.840	11.050	13.260	0.29	0.75	<1	1.20E-07
19			0.990	1.974	3.948	5.922	7.896	9.870	11.844	0.29	0.99	<1	5.91E-06
20			0.010	3.141	6.282	9.424	12.565	15.705	18.847	0.27	0.01	<1	2.30E-04
21			0.250	3.010	6.020	9.030	12.040	15.050	18.060	0.27	0.25	<1	6.40E-07
22	0.270		0.500	2.854	5.708	8.562	11.416	14.270	17.124	0.27	0.5	<1	6.00E-07
23			0.750	2.249	4.498	6.747	8.996	11.245	13.494	0.27	0.75	<1	1.73E-07
24			0.990	2.012	4.024	6.036	8.048	10.060	12.072	0.27	0.99	<1	1.82E-06
25			0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.707	18.847	0.25	0.01	<1	1.83E-04
26			0.250	3.023	6.046	9.069	12.092	15.115	18.138	0.25	0.25	<1	5.20E-07
27	0.250		0.500	2.689	5.378	8.067	10.756	13.445	16.134	0.25	0.5	<1	1.40E-07
28			0.750	2.293	4.586	6.879	9.172	11.465	13.758	0.25	0.75	<1	9.07E-07
29			0.990	2.055	4.110	6.165	8.220	10.275	12.330	0.25	0.99	<1	1.89E-06
30			0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.707	18.847	0.23	0.01	<1	3.71E-04
31			0.250	3.036	6.072	9.108	12.144	15.180	18.216	0.23	0.25	<1	2.12E-06
32	0.230		0.500	2.728	5.456	8.184	10.912	13.640	16.368	0.23	0.5	<1	1.80E-07
33			0.750	2.343	4.686	7.029	9.372	11.715	14.058	0.23	0.75	<1	9.20E-07
34			0.990	2.106	4.212	6.318	8.424	10.530	12.636	0.23	0.99	<1	4.33E-06
35			0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.708	18.848	0.22	0.01	<1	2.18E-05
36			0.250	3.043	6.086	9.129	12.172	15.215	18.258	0.22	0.25	<1	4.40E-07
37	0.220		0.500	2.748	5.496	8.244	10.992	13.738	16.486	0.22	0.5	<1	8.59E-07
38			0.750	2.370	4.740	7.110	9.480	11.850	14.220	0.22	0.75	<1	2.27E-06
39			0.990	2.134	4.268	6.402	8.536	10.670	12.804	0.22	0.99	<1	3.46E-06

En la Tabla 3 se analiza la respuesta del MADF cuando se emplean como dato de entrada valores de l con determinado grado de error. A tal fin se determinó con la solución exacta los primeros seis valores de l para una viga con $c = 0.25$ y $h = 0.5$. y . Los casos de análisis consisten en variar estos valores de l en

$e_i = \pm 1\%, \pm 2\%, \pm 3\%, \pm 4\%, \pm 5\%, \pm 7\%, \pm 10\%$, donde

$$e_i = \frac{l_i - l}{l} 100\% \text{ y } l_i$$

son los valores de con el error indicado.

En la Tabla 4 y Tabla 5 se presentan los resultados obtenidos con el MADF a partir de valores de l_n determinados por el método de elementos finitos y en forma experimental respectivamente.

Tabla 3: Análisis de sensibilidad del MADF con optimización cuando hay un error en la determinación de los primeros seis valores de l para una viga con $c = 0.25$ y $h = 0.5$

Caso	e_i	l_{e1}	l_{e2}	l_{e3}	l_{e4}	l_{e5}	l_{e6}	c	h	e_c	e_h
50	-10%	2.42035717	4.84071434	9.68142868	14.52214302	19.36285736	24.20357170	0.2130	0.8362	14.80	67.25
51	-7%	2.50103676	4.97807351	9.95614702	14.93422053	19.87896074	24.79828126	0.2290	0.7035	8.40	40.71
52	-5%	2.55482146	5.08964291	10.17928582	15.26892473	20.35820301	25.74736401	0.2360	0.6361	5.60	27.22
53	-4%	2.58171432	5.13742864	10.27485728	15.41178592	20.54904784	26.00366304	0.2400	0.2976	4.00	40.49
54	-3%	2.60860718	5.19093003	10.38186006	15.52379009	20.69814418	26.21440836	0.2440	0.5753	2.40	15.06
55	-2%	2.63550003	5.24444478	10.48888956	15.61443200	20.80000000	26.38000000	0.2520	0.2976	0.80	40.49
56	-1%	2.66239289	5.29795952	10.59583904	15.69440000	20.88000000	26.44000000	0.2310	0.8072	7.80	61.44
57	0	2.68928575	5.35147426	10.70277852	15.77440000	20.96000000	26.50000000	0.2500	0.5000	0.00	0.00
58	1%	2.71617861	5.40499000	10.80971800	15.85440000	21.04000000	26.56000000	0.2530	0.5012	1.20	0.24
59	2%	2.74307146	5.45850376	10.91110076	15.92880000	21.11600000	26.62000000	0.2560	0.2976	2.40	40.49
60	3%	2.76996432	5.51201849	11.01248323	16.00320000	21.19200000	26.68000000	0.2610	0.3137	4.40	37.27
61	4%	2.79685718	5.56553323	11.10386570	16.07760000	21.26800000	26.74000000	0.2680	0.2976	43.20	40.49
62	5%	2.82375003	5.61904797	11.19524817	16.15200000	21.34400000	26.80000000	0.3450	0.3709	38.00	25.83
63	7%	2.87753675	5.72607746	11.33215492	16.26400000	21.44000000	26.88000000	0.1760	0.3800	29.60	23.99
64	10%	2.95821432	5.88662169	11.65324338	16.41777968	21.61222750	27.08000000	0.3620	0.2976	44.80	40.49

Tabla 4: Primeros seis valores de l obtenidos con el Método Elementos Finitos para vigas E-E con diferentes valores de c y h , y los correspondientes valores de c , h , e_c y e_h obtenidos con el MADF propuesto.

Caso	c	h	Método Elementos Finitos						MADF			
			l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	c	h	e_c	e_h
40	0.099	0.305	4.709	7.840	10.973	14.069	17.124	20.150	0.110	0.121	1.15E+01	6.01E+01
41	0.197	0.266	4.717	7.812	10.890	13.984	17.106	20.189	0.160	0.135	1.89E+01	4.92E+01
42	0.295	0.296	4.723	7.791	10.934	14.063	17.056	20.129	0.290	0.115	1.89E+00	6.12E+01
43	0.400	0.403	4.690	7.788	10.927	13.882	17.152	20.016	0.390	0.150	2.60E+00	6.27E+01
44	0.500	0.296	4.701	7.840	10.880	14.067	17.036	20.224	0.450	0.104	1.00E+01	6.48E+01

Tabla 5: Primeros seis valores de l obtenidos experimentalmente para vigas E-E con diferentes valores de c y h , y los correspondientes valores de c , h , e_c y e_h obtenidos con el MADF propuesto.

Caso	c	h	Experimentalmente						MADF			
			l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	c	h	e_c	e_h
45	0.099	0.305	4.735	7.787	10.881	13.886	16.816	20.051	0.090	0.348	8.74E+00	1.43E+01
46	0.197	0.266	4.708	7.726	10.770	13.758	16.748	20.142	0.160	0.231	1.89E+01	1.33E+01
47	0.295	0.296	4.742	7.738	10.876	13.894	16.950	20.103	0.290	0.190	1.69E+00	3.57E+01
48	0.400	0.403	4.646	7.637	10.704	13.542	16.628	19.735	0.140	0.363	6.50E+01	9.94E+00
49	0.500	0.296	4.627	7.660	10.635	13.691	16.509	19.854	0.140	0.354	7.20E+01	1.96E+01

En la Figura 5 se presentan los valores de e_h presentados en la Tabla. 1

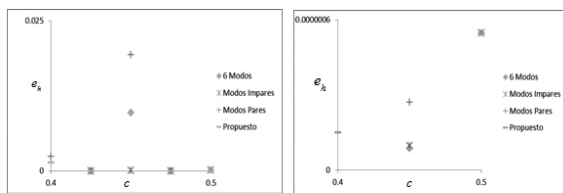


Figura 5: a) e_h vs c para $h = 0.99$ b) Der. e_h vs c para $h = 0.75$

En la Figura 6a se muestran los resultados presentados en la Tabla 2. En la Figura 6b y en la Figura 7a se presentan los valores de e_h que es el promedio el e_h para los distintos casos de la Tabla 2 agrupados según tengan el mismo valor de c o de h .

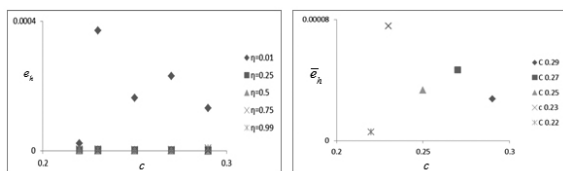


Figura 6: a) e_h vs c b) Der. e_h vs c

En la gráfica de la Figura 7b se comparó el e_c según el error en la determinación de l para los datos presentado en la Tabla 3.



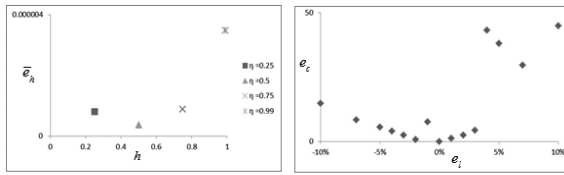


Figura 7: a) $|zq|$ vs c b) Der. promedio e_c vs e_i

Si bien algunos de los resultados crea dispersión se puede observar, como es de esperar, que a medida que crece el error en la determinación de l , lo hace el error en la determinación de c .

4 Conclusiones

Se propuso un método analítico de detección de fisura (MADF) a partir de la ecuación de frecuencias obtenida del problema de contorno de una vigas Euler-Bernoulli con restricciones elásticas generales en los extremos y en puntos intermedios. El MADF fue optimizado con herramientas estadísticas y analíticas y se verificó su funcionalidad en un estudio paramétrico para el caso en que la fisura se encuentra ubicada alrededor de puntos de inflexión o nodos de las diferentes formas modales de la viga con fisura. Además se realizó un análisis de sensibilidad que consiste en variar los valores exactos de las frecuencias naturales para observar la respuesta del MADF.

Se presentaron resultados de la posición y profundidad de fisura obtenidas con el MADF a partir de los valores de frecuencias naturales obtenidas con mediciones experimentales, con el programa Abaqus y con la solución exacta.

5. Referencias

- [1] Javier L. Raffo, Marcos R. Carrizo, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013), Vibraciones de vigas y pórticos ante la presencia de fisuras. Implementación del problema inverso, Mecánica Computacional Vol XXXII págs. 1715-1735, Mendoza, 2013.
- [2] S. P. Lele, S. K. Maiti, Journal of Sound and Vibration, modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension, 2002.
- [3] H. P. Lin, S. C. Chang and J. D. Wu, Journal of Sound and Vibration, Beam vibrations with an arbitrary number of cracks, 2002.
- [4] N. Khaji, M. Shafiei, M. Jalalpour, Interna-

tional Journal of Mechanical Sciences, Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions, 2009.

[5] Ricardo Oscar Grossi - María Virginia Quintana, Journal of Sound and Vibration, The transition conditions in the dynamics of elastically restrained beams, 2008.

[6] Ostachowicz y Krawczuk, Journal of Sound and Vibration, Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam, 1991.